Números y desigualdades

Lo que debes saber

Distintas clases de números

Números naturales. Los números **naturales** 1,2,3,... . El conjunto de todos ellos se representa por $\mathbb{N}$.

Números enteros. Los números **enteros** ...,-2,-1,0,1,2,... cuyo conjunto se representa por $\mathbb{Z}$.

Números racionales. Los números **racionales** que son cocientes de la forma p/q donde $p \in \mathbb{Z}$, $q \in \mathbb{N}$, cuyo conjunto representamos por $\mathbb{Q}$.

Números irracionales. También conoces otros números como $\sqrt{2}$, π, o el número e que no son números racionales y que se llaman, con una expresión no demasiado afortunada, ***números irracionales***.

Números reales. El conjunto formado por todos los números racionales e irracionales se llama conjunto de los **números reales** y se representa por $\mathbb{R}$.

Es claro que $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$.

Axiomas de los números reales

Axiomas algebraicos

Propiedades asociativas. $(x + y) + z = x + (y + z)$, $\qquad (x\,y)z = x(y\,z)$.

Propiedades conmutativa.s $\quad x + y = y + x$, $\qquad x\,y = yx$.

Elementos neutros. El 0 y el 1 son tan importantes que enunciamos seguidamente sus propiedades: $0 + x = x$, $1x = x$ para todo $x \in \mathbb{R}$.

Elementos opuesto e inverso. Para cada $x \in \mathbb{R}$ hay un número real llamado *opuesto de* x, que representamos por $-x$, tal que $x + (-x) = 0$. Para cada número real $x \neq 0$ hay un número real llamado *inverso de* x, que representamos por x^{-1}, tal que $xx^{-1} = 1$.

Observación importante. $-x$ no debe leerse "menos x" sino "opuesto de x".

Propiedad distributiva. $\quad (x + y)z = xz + y\,z$.

Algunas consecuencias de los axiomas algebraicos

- Cualquier número multiplicado por 0 es igual a 0: $0x = 0$.
- El 0 no tiene inverso. No se puede dividir por 0.
- Para todos $x, y \in \mathbb{R}$ se verifica que $(-x)y = -xy$.
- Para todos $x, y \in \mathbb{R}$ se verifica que $(-x)(-y) = xy$.

Axiomas de orden

Los números suelen representarse como puntos de una recta en la que se fija un origen, el 0, de forma arbitraria. Los números que hay a la derecha de 0, se llaman *positivos* y el conjunto de todos ellos se representa por $\mathbb{R}^+$. Se verifican las siguientes propiedades.

- **Ley de tricotomía.** Para cada número real x se verifica una sola de las siguientes tres afirmaciones: $x = 0$, x es positivo, $-x$ es positivo.
- **Estabilidad de $\mathbb{R}^+$.** La suma y el producto de números positivos es también un número positivo.

Los elementos del conjunto $\mathbb{R}^- = \{-x : x \in \mathbb{R}^+\}$ se llaman *números negativos*.

Definición. Para $x, y \in \mathbb{R}$ escribimos $x < y$ (léase x *es menor que* y) o $y > x$ (léase y *es mayor que* x) para indicar que $y - x \in \mathbb{R}^+$, y escribimos $x \leqslant y$ o $y \geqslant x$ para indicar que $y - x \in \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$.

Notación. En adelante usaremos las notaciones: $\mathbb{R}^+_o = \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$, $\mathbb{R}^-_o = \mathbb{R}^- \cup \{0\}$ y $\mathbb{R}^* = \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

Reglas para trabajar con desigualdades

Se dice que dos igualdades o dos desigualdades son *equivalentes* cuando siempre que una de ellas es cierta también lo es la otra. En lo que sigue se supone que a, b, c son números reales.

- Las desigualdades $a < b$ y $a + c < b + c$ son equivalentes.
- Para todo $c > 0$ se verifica que las desigualdades $a < b$ y $ac < bc$ son equivalentes.
- Para todo $c < 0$ se verifica que las desigualdades $a < b$ y $ac > bc$ son equivalentes.
- Se verifica que $ab > 0$ si, y sólo si, a e b son los dos positivos o los dos negativos. En particular, si $a \neq 0$ entonces se verifica que $a^2 > 0$.
- Las desigualdades $a > 0$ y $\dfrac{1}{a} > 0$ son equivalentes.
- Supuesto que a y b son los dos positivos o los dos negativos, se verifica que las desigualdades $a < b$ y $\dfrac{1}{b} < \dfrac{1}{a}$ son equivalentes.

Definición. Se dice que un conjunto no vacío de números reales, $A \subset \mathbb{R}$, tiene *máximo* si hay un número $M \in A$ que es el mayor de todos los elementos de A, es decir, $x \leqslant M$ para todo $x \in A$. Cuando esto ocurre, escribimos $M = \max A$. Se dice que un conjunto no vacío de números reales, $A \subset \mathbb{R}$, tiene *mínimo* si hay un número $m \in A$ que es el menor de todos los elementos de A, es decir, $m \leqslant x$ para todo $x \in A$. Cuando esto ocurre, escribimos $m = \min A$.

Valor absoluto. El *valor absoluto* de un número $x \in \mathbb{R}$ se define como el número:

$$|x| = \begin{cases} x & \text{si } x \geqslant 0 \\ -x & \text{si } x \leqslant 0 \end{cases}$$

Para trabajar con valores absolutos es útil recordar la siguiente definición.

Definición. Para cada número $z \in \mathbb{R}^+_o$, representamos por $\sqrt{z}$ al único número ***mayor o igual que cero*** cuyo cuadrado es igual a z.

La utilidad de la raíz cuadrada para trabajar con valores absolutos procede de la siguiente estrategia de procedimiento.

Estrategia

- Supuesto que $a \geqslant 0$ y $b \geqslant 0$, se verifica que las igualdades $a = b$ y $a^2 = b^2$ son equivalentes.
- Supuesto que $a \geqslant 0$ y $b \geqslant 0$, se verifica que las desigualdades $a < b$ y $a^2 < b^2$ son equivalentes.

Geométricamente, $|x|$ representa la distancia de x al origen, 0, en la recta real. De manera más general:

$$|x - y| = \text{distancia entre } x \text{ e } y$$

representa la longitud del segmento de extremos x e y.

Propiedades del valor absoluto. Para $x, y \in \mathbb{R}$ se verifica que:

i) $|x| \leqslant y$ es equivalente a $-y \leqslant x \leqslant y$.

ii) $|x\,y| = |x||y|$.

iii) $|x + y| \leqslant |x| + |y|$. Además, se verifica que $|x + y| = |x| + |y|$ si, y sólo si, $xy \geqslant 0$.

iv) $||x| - |y|| \leqslant |x - y|$ y la igualdad se da si, y sólo si, $xy \geqslant 0$.

El apartado iii) se conoce como **(desigualdad triangular)**.

Te recuerdo que debes leer de forma correcta las propiedades anteriores: no te fijes en las letras sino en los conceptos. La propiedad ii) debes leerla *"el valor absoluto de un producto es igual al producto de los valores absolutos"*. Por su parte, la desigualdad triangular dice dos cosas:

- *El valor absoluto de una suma es menor o igual que la suma de los valores absolutos.*
- *El valor absoluto de una suma es igual a la suma de los valores absolutos si, y sólo si, todos los sumandos son positivos o todos todos los sumandos son negativos.*

La siguiente desigualdad es una de las más útiles del Análisis Matemático.

Desigualdad de las medias. Cualesquiera sean los números positivos $a_1, a_2, \cdots, a_n$ se verifica que:

$$\sqrt[n]{a_1 a_2 \cdots a_n} \leqslant \frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n}$$

Y la igualdad se da si, y sólo si, $a_1 = a_2 = \cdots = a_n$.

Intervalos

Usaremos las siguientes notaciones para los distintos tipos de intervalos.

Intervalos que tienen dos puntos extremos a y b (donde $a \leqslant b$ son números reales):

$$\begin{array}{lcll}
[a,b] & = & \{x \in \mathbb{R} : a \leqslant x \leqslant b\} & \text{(intervalo cerrado)} \\
]a,b[& = & \{x \in \mathbb{R} : a < x < b\} & \text{(intervalo abierto)} \\
[a,b[& = & \{x \in \mathbb{R} : a \leqslant x < b\} & \text{(intervalo abierto a derecha y cerrado a izquierda)} \\
]a,b] & = & \{x \in \mathbb{R} : a < x \leqslant b\} & \text{(intervalo abierto a izquierda y cerrado a derecha)}
\end{array}$$

Intervalos que tienen un único punto extremo $c \in \mathbb{R}$ llamado *origen* del intervalo:

$$\begin{array}{rcll}
]-\infty, c[& = & \{x \in \mathbb{R} : x < c\} & \text{(semirrecta abierta a la izquierda)} \\
]-\infty, c] & = & \{x \in \mathbb{R} : x \leqslant c\} & \text{(semirrecta cerrada a la izquierda)} \\
]c, +\infty[& = & \{x \in \mathbb{R} : x > c\} & \text{(semirrecta abierta a la derecha)} \\
[c, +\infty[& = & \{x \in \mathbb{R} : x \geqslant c\} & \text{(semirrecta cerrada a la derecha)}
\end{array}$$

Finalmente, la recta real $\mathbb{R}$, es también un intervalo. Hay caprichosos a quienes les gusta escribir $\mathbb{R}=]-\infty,+\infty[$.

Ejercicios típicos de desigualdades

Desigualdades entre polinomios. Supongamos que $p(x)$ es una función polinómica de una variable, y queremos calcular para qué valores de la variable x se verifica que $p(x)>0$.

En este tipo de ejercicios hay que tener en cuenta el siguiente resultado.

> *Una función polinómica solamente puede cambiar de signo en los puntos donde se anula, y por tanto entre cada par de raíces* **consecutivas** *dicha función es siempre positiva o siempre negativa.*

Naturalmente, para poder usar este resultado debemos empezar por calcular las raíces reales de la ecuación $p(x)=0$. Esto solamente puede hacerse en casos sencillos como, por ejemplo, calcular las *raíces enteras* de un polinomio con coeficientes enteros y coeficiente del término de mayor grado igual a 1, pues sabemos que dichas raíces deben ser divisores del término independiente.

Ejemplo. Calcula para qué valores de x se verifica que $-6-19x+28x^2+2x^3-6x^4+x^5>0$.

Solución. Por lo antes dicho, las raíces *enteras* del polinomio

$$p(x)=-6-19x+28x^2+2x^3-6x^4+x^5$$

solamente pueden ser $-6,-3,-2,-1,1,2,3,6$. Tenemos que:

$$p(-6)<0,\ p(-3)=-480,\ p(-2)=0, p(-1)=32,\ p(1)=0,\ p(2)=20,\ p(3)=0,\ p(6)>0.$$

Por tanto, -2, 1 y 3 son las únicas raíces *enteras* de $p(x)$. Dividiendo por Rufini obtenemos que $p(x)=(x+2)(x-1)(x-3)(x^2-4x-1)$. Calculamos ahora las raíces del trinomio de segundo grado x^2-4x-1, que resultan ser $\alpha=2-\sqrt{5}$ y $\beta=2+\sqrt{5}$.

Ordenamos ahora todas las raíces de menor a mayor. Teniendo en cuenta que $2<\sqrt{5}<3$, resulta que $-1<\alpha<0$, $4<\beta$. Por el resultado enunciado arriba, deducimos que en los intervalos

$$]-\infty,-2[,\ ]-2,\alpha[,\ ]\alpha,1[,\ ]1,3[,\ ]3,\beta[,\ ]\beta,+\infty[$$

el polinomio $p(x)$ es siempre positivo o siempre negativo. Ahora solamente queda evaluar dicho polinomio en un punto cualquiera de cada uno de esos intervalos. Tenemos que:

$$\begin{aligned}
p(-3)<0 &\implies p(x)<0 \text{ para todo } x\in]-\infty,-2[\\
p(-1)>0 &\implies p(x)>0 \text{ para todo } x\in]-2,\alpha[\\
p(0)<0 &\implies p(x)<0 \text{ para todo } x\in]\alpha,1[\\
p(2)>0 &\implies p(x)>0 \text{ para todo } x\in]1,3[\\
p(4)<0 &\implies p(x)<0 \text{ para todo } x\in]3,\beta[\\
p(5)>0 &\implies p(x)>0 \text{ para todo } x\in]\beta,+\infty[
\end{aligned}$$

☺

Si nos piden estudiar para qué valores de la variable x se verifica una desigualdad del tipo $p(x)<q(x)$, donde $p(x)$ y $q(x)$ son funciones polinómicas, basta observar que la desigualdades

$p(x) < q(x)$ y $q(x) - p(x) > 0$ son equivalentes y que $q(x) - p(x)$ es una función polinómica por lo que podemos seguir el mismo procedimiento anterior.

Observación importante. Podemos usar el hecho de que las desigualdades $ab \geqslant 0$ y $b \geqslant 0$ son equivalentes cuando $a \geqslant 0$ para simplificar el estudio del signo de una función polinómica.

Por ejemplo, sea la función polinómica $p(x) = (x+2)^3(x+1)^2x(x-1)^5(x-4)^6(x^2+x+1)$. Como $(x+1)^2 \geqslant 0$, $(x-4)^6 \geqslant 0$ y x^2+x+1 es un trinomio con raíces imaginarias y cuyo coeficiente del término x^2 es positivo, por lo que se verifica que $x^2+x+1 > 0$ para todo $x \in \mathbb{R}$ (de hecho $x^2+x+1 = (x+1/2)^2 + 3/4 > 0$), deducimos que la desigualdad $p(x) \geqslant 0$ es equivalente a $(x+2)^3x(x-1)^5 \geqslant 0$.

Fíjate que lo que hemos hecho ha sido *prescindir de las raíces de orden par* (la raíz -1 de orden 2 y la raíz 4 de orden 6). También podemos prescindir de los trinomios con raíces complejas porque son siempre positivos o siempre negativos.

Podemos simplificar más teniendo en cuenta que si k es un número impar entonces a^k y a son los dos positivos o los dos negativos. Por tanto la desigualdad $(x+2)^3x(x-1)^5 \geqslant 0$ es equivalente a $(x+2)x(x-1) \geqslant 0$. Esta última ya es muy fácil de estudiar y deducimos que $p(x) \leqslant 0$ para $x < -2$, $p(x) \geqslant 0$ para $-2 < x < 0$, $p(x) \leqslant 0$ para $0 < x < 1$ y $p(x) \geqslant 0$ para $x > 1$. Teniendo ahora en cuenta que $p(x)$ solamente se anula en los puntos $-2, -1, 0, 1, 4$, podemos precisar el resultado obtenido como sigue:

$$\begin{aligned}
p(x) < 0 &\ \text{ para todo } x \in]-\infty, -2[\\
p(x) > 0 &\ \text{ para todo } x \in]-2, -1[\cup]-1, 0[\\
p(x) < 0 &\ \text{ para todo } x \in]0, 1[\\
p(x) > 0 &\ \text{ para todo } x \in]1, 4[\cup]4, +\infty[
\end{aligned}$$

Es fácil deducir de lo anterior el siguiente resultado.

> *Una función polinómica cambia de signo en las raíces reales de orden impar y no cambia de signo en las raíces de orden par.*

Desigualdades entre funciones racionales. Supongamos que $p(x)$ y $q(x)$ son funciones polinómicas de una variable, y queremos calcular para qué valores de la variable x se verifica que $\dfrac{p(x)}{q(x)} > 0$. Se supone que los polinomios $p(x)$ y $q(x)$ no tienen factores comunes.

En este tipo de ejercicios hay que tener en cuenta el siguiente resultado.

> *Una función racional solamente puede cambiar de signo en los puntos donde se anula el numerador o el denominador, y por tanto entre cada par de dichos puntos* ***consecutivos*** *dicha función es siempre positiva o siempre negativa.*

Naturalmente, para poder usar este resultado debemos empezar por calcular las raíces del numerador y del denominador y valen las mismas observaciones anteriores.

Ejemplo. Calcula para qué valores de x se verifica que $R(x) = \dfrac{x^2-6x+5}{x-3} > 0$.

Solución. Se trata de una función racional. Las raíces del numerador son 1 y 5. El denominador solamente se anula en 3. Las raíces del numerador y denominador ordenadas de menor a mayor son $1, 3, 5$.

Por tanto, en los intervalos $]-\infty, 1[$, $]1, 3[$, $]3, 5[$ y $]5, +\infty[$ la función dada es siempre positiva o siempre negativa. Ahora solamente queda evaluar dicha función en un punto cualquiera de cada uno de esos intervalos. Tenemos que:

$$\begin{aligned}
R(0) < 0 \quad &\Longrightarrow \quad R(x) < 0 \text{ para todo } x \in]-\infty, 1[\\
R(2) > 0 \quad &\Longrightarrow \quad R(x) > 0 \text{ para todo } x \in]1, 3[\\
R(4) < 0 \quad &\Longrightarrow \quad R(x) < 0 \text{ para todo } x \in]3, 5[\\
R(6) > 0 \quad &\Longrightarrow \quad R(x) > 0 \text{ para todo } x \in]5, +\infty[
\end{aligned}$$

☺

Si nos piden estudiar para qué valores de la variable x se verifica una desigualdad del tipo $R(x) < Q(x)$, donde $R(x)$ y $Q(x)$ son funciones racionales, basta observar que la desigualdades $R(x) < Q(x)$ y $Q(x) - R(x) > 0$ son equivalentes y que $Q(x) - R(x)$ es una función racional por lo que podemos seguir el mismo procedimiento anterior.

Otra forma de resolver desigualdades entre funciones racionales consiste en observar que una desigualdad del tipo $\dfrac{p(x)}{q(x)} > 0$ es equivalente a la desigualdad $p(x)q(x) > 0$, la cual ya sabemos resolver porque $p(x)q(x)$ es una función polinómica.

Igualdades o desigualdades en las que intervienen valores absolutos

- Igualdades del tipo $|f(x) + g(x)| = |f(x)| + |g(x)|$. Como consecuencia de la desigualdad triangular, la igualdad $|f(x) + g(x)| = |f(x)| + |g(x)|$ es equivalente a la desigualdad $f(x)g(x) \geqslant 0$.
- Una igualdad del tipo $|f(x)| = |g(x)|$ es equivalente a la igualdad $(f(x))^2 = (g(x))^2$; y también es equivalente a que se verifique alguna de las igualdades $f(x) = g(x)$ o $f(x) = -g(x)$.
- Una igualdad del tipo $|f(x)| = g(x)$ es equivalente a que se verifique alguna de las igualdades $f(x) = g(x)$ o $f(x) = -g(x)$, y además que se verifique $g(x) \geqslant 0$.
- Una desigualdad del tipo $|f(x)| \leqslant |g(x)|$ es equivalente a la desigualdad $(f(x))^2 \leqslant (g(x))^2$.
- Una desigualdad del tipo $|f(x)| \leqslant |g(x)|$ también puede estudiarse calculando los valores de x para los que se da la igualdad $|f(x)| = |g(x)|$, es decir, los puntos en que se anula la función $h(x) = |f(x)| - |g(x)|$. Estos puntos determinan intervalos en los que la función $h(x)$ tiene signo constante.
- Una desigualdad del tipo $|f(x)| \leqslant g(x)$ es equivalente a que se verifiquen las dos desigualdades $-g(x) \leqslant f(x) \leqslant g(x)$, y además que se verifique $g(x) \geqslant 0$.
- Una desigualdad del tipo $|f(x)| \geqslant g(x)$ se verifica para los valores de x tales que $g(x) < 0$; y para aquellos valores de x para los que $g(x) \geqslant 0$ es equivalente a que se verifique alguna de las dos desigualdades $f(x) \leqslant -g(x)$, $f(x) \geqslant g(x)$.

Observación importante. Las reglas anteriores se aplican exactamente igual para igualdades o desigualdades en las que intervienen más de una variable.

Por ejemplo, una igualdad del tipo $|f(x, y) + h(z)| = |f(x, y)| + |h(z)|$ es equivalente a la desigualdad $f(x, y)h(z) \geqslant 0$. Es posible que esta última desigualdad no pueda simplificarse, en cuyo caso debemos dejarla indicada tal como está.

En general, para resolver igualdades o desigualdades en las que intervienen valores absolutos se deben considerar todos los casos posibles para quitar los valores absolutos que aparecen.

Ejemplo. Calcula para qué valores de x se verifica la igualdad $\left|x^2-6x+8\right| = x-2$.

Solución. La primera condición que debe cumplirse es que $x-2 \geqslant 0$, esto es, $x \geqslant 2$. Para $x<2$ la igualdad del enunciado no puede darse nunca. Supuesto que $x \geqslant 2$, la igualdad del enunciado equivale a que se verifique alguna de las igualdades:

$$\text{a)}\ x^2-6x+8 = x-2, \qquad \text{b)}\ x^2-6x+8 = -x+2$$

La igualdad a) es $x^2-7x+10=0$, cuyas soluciones son 2 y 5. La igualdad b) es $x^2-5x+6=0$, cuyas soluciones son 2 y 3. Observa que todas las soluciones obtenidas son mayores o iguales que 2. Concluimos que la igualdad del enunciado es cierta para $x=2$, $x=3$ y $x=5$. ☺

Ejemplo. Calcula para qué valores de x se verifica la desigualdad $\left|\dfrac{x-2}{x^2-2x-1}\right| > \dfrac{1}{2}$.

Solución. La desigualdad del enunciado equivale a que se verifique alguna de las desigualdades:

$$\text{a)}\ \frac{x-2}{x^2-2x-1} > \frac{1}{2}, \qquad \text{b)}\ \frac{x-2}{x^2-2x-1} < -\frac{1}{2}$$

La desigualdad a) es equivalente a:

$$\frac{x-2}{x^2-2x-1} - \frac{1}{2} = \frac{-x^2+4x-3}{2(x^2-2x-1)} > 0 \Longleftrightarrow (-x^2+4x-3)(x^2-2x-1) > 0$$

Calculando las raíces de los dos trinomios obtenemos que son, ordenadas de menor a mayor, $\left\{1-\sqrt{2}, 1, 1+\sqrt{2}, 3\right\}$. Son todas ellas *raíces impares* de orden 1 (raíces *simples*), por lo que el polinomio $p(x) = (-x^2+4x-3)(x^2-2x-1)$ *cambia de signo en todas ellas*. Fácilmente se ve que para $x < 1-\sqrt{2}$ se tiene que $p(x) < 0$. Deducimos que:

$$\begin{array}{l}
p(x) < 0 \ \text{ para todo } \ x \in]-\infty, 1-\sqrt{2}[\\
p(x) > 0 \ \text{ para todo } \ x \in]1-\sqrt{2}, 1[\\
p(x) < 0 \ \text{ para todo } \ x \in]1, 1+\sqrt{2}[\\
p(x) > 0 \ \text{ para todo } \ x \in]1+\sqrt{2}, 3[\\
p(x) < 0 \ \text{ para todo } \ x \in]3, +\infty[
\end{array}$$

Concluimos que la desigualdad a) se verifica para $x \in]1-\sqrt{2}, 1[\cup]1+\sqrt{2}, 3[$.

Análogamente se obtiene que la desigualdad b) se verifica para $x \in]-\sqrt{5}, 1-\sqrt{2}[\cup]\sqrt{5}, 1+\sqrt{2}[$.

Finalmente, la desigualdad del enunciado se verifica para

$$x \in]-\sqrt{5}, 1-\sqrt{2}[\cup]1-\sqrt{2}, 1[\cup]\sqrt{5}, 1+\sqrt{2}[\cup]1+\sqrt{2}, 3[.$$

☺

Ejemplo. Calcula para qué valores de x se verifica la igualdad

$$|x^2+3x-9| = |x^2+x-6| + |2x-3|\,.$$

Solución. Poniendo $f(x) = x^2 + x - 6$ y $g(x) = 2x - 3$, la igualdad del enunciado se escribe como $|f(x) + g(x)| = |f(x)| + |g(x)|$, igualdad que equivale a $f(x)g(x) \geqslant 0$, es decir $(x^2+x-6)(2x-3) \geqslant 0$. Calculando las raíces del trinomio tenemos que

$$(x^2 + x - 6)(2x - 3) = 2(x + 3)(x - 2)(x - 3/2).$$

Por tanto, $f(x)g(x)$ es un polinomio cuyas raíces, $\{-3, 3/2, 2\}$, son simples y, por tanto, cambia de signo en todas ellas. Deducimos fácilmente que la desigualdad $f(x)g(x) \geqslant 0$ se verifica si $-3 \leqslant x \leqslant 3/2$, o si $x \geqslant 2$. ☺

Ejemplo. Calcula para qué valores de x se verifica la desigualdad $|x^2 - 6x + 5| > |x^2 + 2x - 5|$.

Solución. Empezamos calculando los puntos en que se verifica que $|x^2 - 6x + 5| = |x^2 + 2x - 5|$. Puesto que dos números tienen igual valor absoluto si son iguales o son opuestos, esta igualdad equivale a que se verifique alguna de las dos igualdades $x^2 - 6x + 5 = x^2 + 2x - 5$, $x^2 - 6x + 5 = -(x^2 + 2x - 5)$. La primera solamente se verifica para $x = 5/4$ y la segunda para $x = 0$ y $x = 2$. Deducimos que la función $h(x) = |x^2 - 6x + 5| - |x^2 + 2x - 5|$ tiene signo constante en los intervalos $]-\infty, 0[$, $]0, 5/4[$, $]5/4, 2[$ y $]2, +\infty[$. Tenemos que:

$$\begin{aligned} h(-1) = 6 &\implies h(x) > 0 \text{ para todo } x \in]-\infty, 0[\\ h(1) = -2 &\implies h(x) < 0 \text{ para todo } x \in]0, 5/4[\\ h(3/2) = 3/2 &\implies h(x) > 0 \text{ para todo } x \in]5/4, 2[\\ h(3) = -6 &\implies h(x) < 0 \text{ para todo } x \in]2, +\infty[\end{aligned}$$

Por tanto, la desigualdad del enunciado se verifica para $x < 0$ o para $5/4 < x < 2$. ☺

Ejemplo. Calcula para qué valores de x se verifica la desigualdad $|-x + |x - 1|| < 2$.

Solución. La desigualdad del enunciado es equivalente a las dos desigualdades $-2 < -x + |x - 1| < 2$, que son equivalentes a $x - 2 < |x - 1| < x + 2$. La segunda de estas desigualdades solamente puede darse si $x > -2$. Supongamos que $-2 < x \leqslant 1$. Entonces se tiene que $|x - 1| = 1 - x$, por lo que las desigualdades anteriores son en este caso $x - 2 < 1 - x < x + 2$, que equivalen a $-3 < -2x < 1$, es decir, $-1 < 2x < 3$, o bien $-1/2 < x < 3/2$. No podemos olvidar que hemos usado que $x \leqslant 1$, por lo que la condición obtenida queda $-1/2 < x \leqslant 1$. Para $x > 1$ se tiene que $|x - 1| = x - 1$, por lo que las desigualdades anteriores son en este caso $x - 2 < x - 1 < x + 2$, que se cumplen siempre. Concluimos que la desigualdad del enunciado es cierta para $x > -1/2$. ☺

Ejemplo. Calcula para qué valores de x se verifica la siguiente desigualdad.

$$|x + 1| + |x^2 - 3x + 2| < 4.$$

Solución. Puesto que $x^2 - 3x + 2 = (x - 1)(x - 2)$, tenemos que

$$|x + 1| + |x^2 - 3x + 2| = |x + 1| + |(x - 1)(x - 2)| = |x + 1| + |x - 1||x - 2|.$$

Para controlar los valores absolutos consideraremos por separado los casos $x < -1$, $-1 < x < 1$, $1 < x < 2$ y $x > 2$.

- Para $x < -1$ tenemos $|x + 1| + |x - 1||x - 2| = -x - 1 + (1 - x)(2 - x) = x^2 - 4x + 1$. Por tanto, la desigualdad del enunciado es $x^2 - 4x + 1 < 4$, es decir, $x^2 - 4x - 3 < 0$. Es fácil comprobar que para $x < -1$ se verifica que $x^2 - 4x - 3 > 0$. Por tanto, para $x < -1$ la desigualdad del enunciado es siempre falsa.

- Para $-1 < x < 1$ tenemos $|x+1| + |x-1||x-2| = x+1+(1-x)(2-x) = x^2-2x+3$. Por tanto, la desigualdad del enunciado es $x^2-2x+3 < 4$, es decir, $x^2-2x-1 < 0$. Las raíces de este trinomio son $1-\sqrt{2}$ y $1+\sqrt{2}$. Es inmediato comprobar que $x^2-2x-1 < 0$ equivale a que $1-\sqrt{2} < x < 1+\sqrt{2}$. Como $-1 < 1-\sqrt{2} < 1$, concluimos que la desigualdad del enunciado es válida para $1-\sqrt{2} < x < 1$.

- Para $1 < x < 2$ tenemos $|x+1| + |x-1||x-2| = x+1+(x-1)(2-x) = -x^2+4x-1$. Por tanto, la desigualdad del enunciado es $-x^2+4x-1 < 4$, es decir, $x^2-4x+5 > 0$. Este trinomio no tiene raíces reales, por tanto se verifica que $x^2-4x+5 > 0$ para todo $x \in \mathbb{R}$ (observa que $x^2-4x+5 = (x-2)^2+1 > 0$). Concluimos que la desigualdad del enunciado es válida para $1 < x < 2$.

- Para $x > 2$ tenemos $|x+1| + |x-1||x-2| = x+1+(x-1)(x-2) = x^2-2x+3$. Por tanto, la desigualdad del enunciado es $x^2-2x+3 < 4$, es decir, $x^2-2x-1 < 0$. Las raíces de este trinomio son $1-\sqrt{2}$ y $1+\sqrt{2}$. Es inmediato comprobar que $x^2-2x-1 < 0$ equivale a que $1-\sqrt{2} < x < 1+\sqrt{2}$. Como $2 < 1+\sqrt{2}$, concluimos que la desigualdad del enunciado es válida para $2 < x < 1+\sqrt{2}$.

Para $x=-1$ la desigualdad no se verifica. Para $x=1$ y $x=2$ la desigualdad se verifica. Concluimos que la desigualdad se verifica para $1-\sqrt{2} < x < 1+\sqrt{2}$. ☺

Seguidamente vamos a ver dos bonitos ejemplos de aplicación de la desigualdad de las medias.

Ejemplo. Prueba que el cuadrado es el rectángulo de máxima área para un perímetro dado y de mínimo perímetro para un área dada.

Solución. Sean a y b las longitudes de los dos lados del rectángulo. El área viene dada por $A = ab$ y el perímetro por $P = 2(a+b)$. En virtud de la desigualdad de las medias para dos factores se verifica que:

$$\sqrt{A} = \sqrt{ab} \leqslant \frac{a+b}{2} = \frac{P}{4}$$

Y la igualdad se da si, y sólo si, $a = b$. Para un valor dado, P, del perímetro, el área, A, del rectángulo verifica la desigualdad $\sqrt{A} \leqslant P/4$. Por lo que el valor máximo que puede alcanzar el área será cuando se tenga la igualdad $\sqrt{A} = P/4$, lo que ocurre solamente cuando $a = b$, esto es, el rectángulo es un cuadrado. Análogamente, para un valor dado, A, del área, el perímetro, P, del rectángulo verifica la desigualdad $\sqrt{A} \leqslant P/4$. Por lo que el valor mínimo que puede alcanzar el perímetro será cuando se tenga la igualdad $\sqrt{A} = P/4$, lo que ocurre solamente cuando $a = b$, esto es, el rectángulo es un cuadrado. ☺

Ejemplo. Prueba que el triángulo equilátero es el triángulo que tiene máxima área para un perímetro dado y de mínimo perímetro para un área dada.

Sugerencia. Si a, b, c son las longitudes de los lados y $p=(a+b+c)/2$ es el semiperímetro, entonces, según la fórmula de Heron de Alejandría, el área, A, viene dada por $A = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$.

Solución. En virtud de la desigualdad de las medias para tres factores, y teniendo en cuenta que $(p-a)+(p-b)+(p-c) = 3p-2p = p$, tenemos:

$$A^{2/3} = \sqrt[3]{p(p-a)(p-b)(p-c)} = \sqrt[3]{p}\,\sqrt[3]{(p-a)(p-b)(p-c)} \leqslant \sqrt[3]{p}\,\frac{p}{3} = \frac{p^{4/3}}{3}$$

Y la igualdad se da si, y sólo si, $p-a=p-b=p-c$, que equivale a que $a=b=c$. Para un valor dado, $P=2p$, del perímetro, el área, A, del triángulo verifica la desigualdad $A^{2/3}\leqslant \frac{1}{3}p^{4/3}$. Por lo que el valor máximo que puede alcanzar el área será cuando se tenga la igualdad $A^{2/3}=\frac{1}{3}p^{4/3}$, lo que ocurre solamente cuando $a=b=c$, esto es, el triángulo es equilátero. Análogamente, para un valor dado, A, del área, el perímetro, $P=2p$, del rectángulo verifica la desigualdad $A^{2/3}\leqslant \frac{1}{3}p^{4/3}$. Por lo que el valor mínimo que puede alcanzar el perímetro será cuando se tenga la igualdad $A^{2/3}=\frac{1}{3}p^{4/3}$, lo que ocurre solamente cuando $a=b=c$, esto es, el triángulo es equilátero. ☺

Observación importante. En Análisis Matemático trabajamos con precisión infinita y ***nunca usamos decimales*** (excepto en problemas de cálculo de valores aproximados que ya veremos en su momento). *Esto quiere decir que las raíces, los logaritmos, las exponenciales y otras funciones no se calculan, se dejan expresados simbólicamente.* En Análisis $\sqrt{2}$ no es igual a $1\cdot 4142135623730950488$; $\log 2$ no es igual a $0\cdot 6931471805599453$. *No uséis decimales en esta asignatura.*

Ejercicios propuestos

1. Calcula para qué valores de x se verifica la desigualdad $\dfrac{1-2x}{x^2-4}>\dfrac{1}{2}$.
2. Calcula para qué valores de x se verifica la desigualdad $x^3(x+2)(x-3)^2(x+1)^5(x+5)^4<0$.
3. Calcula para qué valores de $x\in\mathbb{R}$ se verifica la desigualdad $\dfrac{|x-1|+2}{1+|x^2-5x+6|}<\dfrac{1}{3}$.
4. Supuesto que $0<a<b$, calcula para qué valores de x se verifica la desigualdad
$$\frac{1}{x}+\frac{1}{a+b-x}<\frac{1}{a}+\frac{1}{b}.$$
5. Calcula para qué valores de x se verifican las siguientes desigualdades.

   a) $|x+5|<|x-1|$, b) $|x-1|\,|x+2|=3$, c) $|x^2-x|>1$, d) $|x-y+z|=|x|-|z-y|$
6. Calcula para qué valores de x se verifican las siguientes desigualdades.

   a) $|x+1|+|x-1|<1$, b) $|2x-|2x-1||=-2x$, c) $|2+|x+1||<3$.
7. Prueba que cualesquiera sean los números reales positivos $a>0$ y $b>0$ se verifica que
$$\frac{a}{2(a+b)\sqrt{b}}<\frac{1}{\sqrt{b}}-\frac{1}{\sqrt{a+b}}.$$

Lecturas aconsejadas. Debes consultar los ejercicios resueltos del primer capítulo de mi libro *Cálculo diferencial e integral de funciones de una variable*, que puedes descargar de mi página Web:

http://www.ugr.es/local/fjperez.

También debes leer la Sección 1.1.1 del Capítulo 1, titulada *Axiomas, definiciones, teoremas, lemas, corolarios*.

Las notas históricas al final del Capítulo 1 te resultarán interesantes. En ellas se habla de la razón áurea, de la relación entre números y medida de magnitudes y de cómo los pitagóricos hicieron un descubrimiento de extraordinaria importancia en la cultura europea. Los detalles de esta apasionante historia los encontrarás en la sección 5.2 del Capítulo 5 “Evolución del concepto de número”.